半直線上ノイマン境界条件下での移流拡散方程式の解の長時間挙動

早稲田大学　大学院基幹理工学研究科　数学応用数理専攻
中川　貴就 (TAKANARI NAKAGAWA) *

概要

本講演では移流拡散方程式の初期値境界値問題を考察する．初期値問題の解の挙動については多くの結果が知られているが，初期値境界値問題の解についての類似の結果は多くないように思われる．そこで本研究では，ノイマン境界条件を課した半直線上の移流拡散方程式の解の長時間挙動を解析し，直線上での結果と比較して境界条件が長時間挙動に与える影響を調べる．特に非線形項の指数が 3 の場合に，第一漸近形への収束率の評価に差異が見られたので，その結果を報告する．

1　導入

本稿では，次の移流拡散方程式の初期値境界値問題を考える：

$$\begin{cases} \partial_t u - \partial_x^2 u - \partial_x f(u) = 0, & t > 0, x > 0, \\ \partial_x u(t,0) = 0, & t > 0, \\ u(0,x) = u_0(x), & x > 0. \end{cases} \tag{IBP}$$

ここで，$u : [0,\infty) \times [0,\infty) \to \mathbb{R}$ は未知関数，$u_0 : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ は $t = 0$ で与えられた初期値である．また，非線形項 $f(u)$ はある $q \in (1,\infty)$ を用いて $f(u) = u|u|^{q-1}$ と表されるものとする．移流拡散方程式は，その名のとおり物理量の移流と拡散の相互作用による現象の時間発展を記述するモデルであり，$\partial_x^2 u$ の項と $\partial_x f(u)$ の項がそれぞれ拡散効果と移流効果を表す．また，ノイマン境界条件は，境界における物理量の流入出がないことを表している．一般に，非線形偏微分方程式の解の明示的表現を与えることは困難であるが，解の具体的表示が得られない場合でも，解の長時間挙動等の定性的性質については情報が得られる場合がある．本研究ではノイマン境界条件が (IBP) に与える影響について，長時間挙動の観点から考察することを目的とする．具体的には，(IBP) の解の第一漸近形，第二漸近形を導出し，境界条件を取り除いた直線上での移流拡散方程式の解の長時間挙動の結果と比較する．

* E-mail:nakataka624@akane.waseda.jp

2　先行研究

まず，直線上の熱方程式についての基本的事項を述べる．以下，各 $p \in [1,\infty]$ に対して，$L^p(\mathbb{R})$ は $\mathbb{R}$ 上の Lebesgue 空間とし，$\|\cdot\|_{L^p(\mathbb{R})}$ はそのノルムである．

各 $\varphi \in L^p(\mathbb{R})$, $p \in [1,\infty]$ に対し，φ を初期値とする次の線形熱方程式 (H) を考える：

$$\begin{cases} \partial_t u - \partial_x^2 u = 0, & t > 0, x \in \mathbb{R}, \\ u(0,x) = \varphi(x), & x \in \mathbb{R}. \end{cases} \tag{H}$$

方程式 (H) の $t \geq 0$ における解を $e^{t\Delta}\varphi$ と表すと，$L^p(\mathbb{R})$ 上の有界線形作用素の族 $(e^{t\Delta}; t \geq 0)$ は半群を成し，これは熱半群と呼ばれる．特に $t > 0$ のとき，$e^{t\Delta}\varphi$ は熱核

$$G(t,x) \coloneqq \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}}, \qquad x \in \mathbb{R}$$

を用いて，

$$(e^{t\Delta}\varphi)(x) = (G(t) * \varphi)(x) = \int_{\mathbb{R}} G(t, x-y)\varphi(y)\,\mathrm{d}y, \qquad x \in \mathbb{R} \tag{2.1}$$

と表される．直接計算によって熱核は任意の $p \in [1,\infty]$, $l \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ に対して

$$\left\|\partial_x^l G(t)\right\|_p \leq C t^{-\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{p}\right)-\frac{l}{2}}, \qquad t > 0$$

を満たすことが分かり，$e^{t\Delta}\varphi$ の具体的表示 (2.1) を用いることで，$e^{t\Delta}\varphi$ に関しても同様の減衰評価

$$\left\|\partial_x^l e^{t\Delta}\varphi\right\|_p \leq C t^{-\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{p}\right)-\frac{l}{2}} \|\varphi\|_1, \qquad t > 0$$

が成り立つことが示される．このことから，線形熱方程式 (H) の解 $e^{t\Delta}\varphi$ が時間の経過に伴って $O\left(t^{-\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{p}\right)}\right)$ のオーダーで減衰し，さらに微分する毎に減衰が $t^{-\frac{1}{2}}$ だけ早くなることが分かる．それでは次に，$e^{t\Delta}\varphi$ が時間の経過に伴ってどのような関数に近づいていくのか，即ち解 $e^{t\Delta}\varphi$ の長時間挙動について考える．Taylor の定理より，等式

$$G(t, x-y) = G(t,x) - y\left(\int_0^1 \partial_x G(t, x-\theta y)\,\mathrm{d}\theta\right),$$

が成り立ち，これを $e^{t\Delta}\varphi$ の具体的表示 (2.1) に用いると，

$$\begin{aligned} (e^{t\Delta}\varphi)(x) &= \int_{\mathbb{R}} G(t,x-y)\varphi(y)\,\mathrm{d}y \\ &= \left(\int_{\mathbb{R}} \varphi(y)\,\mathrm{d}y\right) G(t,x) - \int_{\mathbb{R}} y \left(\int_0^1 \partial_x G(t, x-\theta y)\,\mathrm{d}\theta\right)\varphi(y)\,\mathrm{d}y \end{aligned}$$

を得る．この等式を利用することで，$\varphi \in L^1(\mathbb{R})$ ならば任意の $p \in [1,\infty]$ に対して

$$\lim_{t\to\infty} t^{\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{p}\right)} \left\|e^{t\Delta}\varphi - MG(t)\right\|_{L^p} = 0 \tag{2.2}$$

が成り立つことが示される．ここで，$M \coloneqq \displaystyle\int_{\mathbb{R}} \varphi(x)\,\mathrm{d}x$ である．詳しい証明は儀我-儀我 [4] を参照せよ．式 (2.2) から，(H) の解 $e^{t\Delta}\varphi$ の第一漸近形は熱核の定数倍 $MG(t)$ であり，その収束率は解 $e^{t\Delta}\varphi$ 自体の減衰のオーダー $O\left(t^{-\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{p}\right)}\right)$ よりも早い $o\left(t^{-\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{p}\right)}\right)$ で与えられることが分かる．線形熱方程式 (H) に対しては，さらに詳細な解の長時間挙動についての解析もされており，解の高次漸近形についても導出されている．実際，等式

$$G(t,x-y) = G(t,x) - y\partial_x G(t,x) + y^2 \left(\int_0^1 \partial_x^2 G(t, x-\theta y)(1-\theta)\,\mathrm{d}\theta \right)$$

を利用することで，$\varphi \in L^1_1(\mathbb{R})$ ならば任意の $p \in [1,\infty]$ に対して，

$$\lim_{t\to\infty} t^{\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{p}\right)+\frac{1}{2}} \left\| e^{t\Delta}\varphi - MG(t) + m\partial_x G(t) \right\|_{L^p(\mathbb{R})} = 0 \tag{2.3}$$

となることが示される．ここで，$m \coloneqq \displaystyle\int_{\mathbb{R}} x\varphi(x)\,\mathrm{d}x$ である．また，

$$L^1_1(\mathbb{R}) \coloneqq \left\{ \varphi \in L^1(\mathbb{R}) \;;\; \int_{\mathbb{R}} |x\varphi(x)|\,\mathrm{d}x < \infty \right\}$$

と定義する．式 (2.2), (2.3) から，(H) の解の第二漸近形が $-m\partial_x G(t)$ であることが分かる．

ここからは，(IBP) から境界条件を取り除いた以下の初期値問題 (P) に関する先行研究を述べる．

$$\begin{cases} \partial_t u - \partial_x^2 u - \partial_x f(u) = 0, & t>0, x\in\mathbb{R}, \\ u(0,x) = u_0(x), & x \in \mathbb{R}. \end{cases} \tag{P}$$

ここで，$u_0 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ は $t=0$ で与えられた初期値，非線形項 $f(u)$ はある $q \in (1,\infty)$ を用いて $f(u) = u|u|^{q-1}$ と表されるものとする．(P) については多次元の場合も含めた数多くの結果があるが，ここではそれらの結果を一次元に限定して述べる．先ほど導入した熱半群 $(e^{t\Delta}; t \geq 0)$ を用いると，方程式 (P) は以下のような積分方程式

$$u(t,x) = e^{t\Delta}u_0(x) + \int_0^t \partial_x e^{(t-\tau)\Delta} f(u(\tau))(x)\,\mathrm{d}\tau$$

に書き換えることが出来る．Escobedo-Zuazua[1] は，この積分方程式を直接解析することで，$u_0 \in (L^1 \cap L^\infty)(\mathbb{R})$ ならば (P) には時間大域的な解が存在すること，さらにその解 u は任意の $p \in [1,\infty]$ に対して，

$$\|u(t)\|_{L^p(\mathbb{R})} \leq Ct^{-\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{p}\right)}, \qquad t>0$$

を満たすことを示した．この評価式から (P) の解は線形熱方程式 (H) の解と同じオーダーで減衰することがわかる．(P) の解の存在や正則性，アプリオリ評価，減衰評価などの性質については Zuazua のレクチャーノート [8] にも詳しく書かれている．また，解の長時間挙動についても Escobedo-Zuazua[1] で解析されており，次の命題が示されている．

命題 2.1 (Escobedo-Zuazua[1])**.** $q>2$ とする．$u_0 \in (L_1^1 \cap L^\infty)(\mathbb{R})$ であるとし，u を (P) の時間大域解とする．このとき，任意の $p \in [1,\infty]$ に対してある $C_p>0$ が存在して，任意の $t \geq 1$ に対して

$$\|u(t)-MG(t)\|_{L^p(\mathbb{R})} \leq C_p \begin{cases} t^{-\frac{1}{2}(1-\frac{1}{p})-\frac{q-2}{2}}, & 2<q<3, \\ t^{-\frac{1}{2}(1-\frac{1}{p})-\frac{1}{2}}\log(1+t), & q=3, \\ t^{-\frac{1}{2}(1-\frac{1}{p})-\frac{1}{2}}, & q>3 \end{cases}$$

が成り立つ．

この結果から，(P) の解の第一漸近形は線形熱方程式 (H) の場合と同様に熱核の定数倍 $MG(t)$ であり，収束率の上からの評価は非線形項の指数 q によって 3 つに場合分けされることが分かる．さらに，Zuazua[9] は指数 q の命題 2.1 における 3 つの場合分けそれぞれに対して解の第二漸近形を導出した． Zuazua[9] の結果から，命題 2.1 における第一漸近形への収束率が，3 つの場合それぞれで最良であることが示される．ここでは $q=3$ の場合の結果を抜粋して述べる．

命題 2.2 (Zuazua[9])**.** $q=3$ とする．$u_0 \in (L_1^1 \cap L^\infty)(\mathbb{R})$, $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} |u_0(x)|^2 \exp\left(\frac{x^2}{4}\right) \mathrm{d}x < \infty$ であるとし，u を (P) の時間大域解とする．このとき，任意の $p \in [1,\infty]$ に対して，

$$\lim_{t\to\infty} \frac{t^{\frac{1}{2}(1-\frac{1}{p})+\frac{1}{2}}}{\log t} \left\| u(t) - MG(t) - \frac{1}{4\sqrt{3}\pi} M^3 (\log t)\partial_x G(t) \right\|_{L^p(\mathbb{R})} = 0$$

が成り立つ．

さらに，Fukuda[2] は命題 2.2 の仮定を弱めた上で，以下の命題を示した．

命題 2.3 (Fukuda[2])**.** $q=3$ とする．$u_0 \in (L_1^1 \cap L^\infty)(\mathbb{R})$ であるとし，u を (P) の時間大域解とする．このとき，任意の $p \in [1,\infty]$ に対してある $C_p>0$ が存在して，任意の $t \geq 2$ に対して，

$$\left\| u(t) - MG(t) - \frac{1}{4\sqrt{3}\pi} M^3 (\log t)\partial_x G(t) \right\|_{L^p(\mathbb{R})} \leq C_p t^{-\frac{1}{2}(1-\frac{1}{p})-\frac{1}{2}}$$

が成り立つ．

命題 2.2, 2.3 を比べると，Fukuda[2] の結果の方が第二漸近形への収束率が改善されていることが分かる．Fukuda-Sato[3] は，命題 2.3 と同じ仮定のもとで (P) の解 u の第三漸近形を構成し，命題 2.3 における解の第二漸近形への収束率 $O\left(t^{-\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{p}\right)-\frac{1}{2}}\right)$ が最良であることを示した．

以上のように，初期値問題 (P) の解の挙動については数多くの結果があるが，初期値境界値問題 (IBP) の解に対しての類似の結果は多くはないように思われる．例えば，Karch[5] では，(IBP) の解が熱核の定数倍に $o\left(t^{-\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{p}\right)}\right)$ のオーダーで収束することが示されているが，命題 2.1 と比較すると，(IBP) の解の場合も非線形項の指数 q についての場合分けをともなうより詳細な評価を得られるのではないかと期待できる．そこで，本研究では Escobedo-Zuazua[1], Zuazua[8], Fukuda[2], Fukuda-Sato[3] で用いられた初期値問題 (P) の解の解析手法を初期値境界値問題 (IBP) の解の解析に適用し，命題 2.1, 2.3 に類する結果を得ること，そしてそれらの結果を比較して，ノイマン境界条件が (IBP) の解の長時間挙動に与える影響を調べることを目的とする．特に，非線形項の指数 q が 3

の場合に，(IBP) の解の第一漸近形への収束率が (P) の解の第一漸近形への収束率よりも $\log t$ だけ改善出来ることが分かった.

3　準備

本研究の主結果を紹介するための準備として，(IBP) の時間大域解の存在とその性質について述べる．$\mathbb{R}_{\geq 0} \coloneqq [0,\infty)$ とし，各 $p \in [1,\infty]$ に対して $L^p(\mathbb{R}_{\geq 0})$ を $\mathbb{R}_{\geq 0}$ 上の Lebesgue 空間，そのノルムを $\|\cdot\|_p$ と表すとする．さらに，重み付き Lebesgue 空間 $L^1_1(\mathbb{R}_{\geq 0})$ を

$$L^1_1(\mathbb{R}_{\geq 0}) \coloneqq \left\{ \varphi \in L^1(\mathbb{R}_{\geq 0}) \ ; \int_0^\infty |x\varphi(x)| \, \mathrm{d}x < \infty \right\}$$

と定義する．熱核 $G(t,x)$ を用いて，$L^p(\mathbb{R}_{\geq 0})$ 上の有界線形作用素 $e^{t\Delta}_N$, $e^{t\Delta}_D$ をそれぞれ

$$e^{t\Delta}_N \varphi(x) \coloneqq \begin{cases} \displaystyle\int_0^\infty (G(t,x-y) + G(t,x+y))\varphi(y)\,\mathrm{d}y\,, & t > 0, \\ \varphi(x), & t = 0, \end{cases}$$
$$e^{t\Delta}_D \varphi(x) \coloneqq \begin{cases} \displaystyle\int_0^\infty (G(t,x-y) - G(t,x+y))\varphi(y)\,\mathrm{d}y\,, & t > 0, \\ \varphi(x), & t = 0 \end{cases}$$

と定義すると，任意の $\varphi \in L^p(\mathbb{R}_{\geq 0})$ に対して $e^{t\Delta}_N\varphi$, $e^{t\Delta}_D\varphi$ はそれぞれ，初期値を φ とし，境界条件としてノイマン境界条件，ディリクレ境界条件を課した半直線上の線形熱方程式の解となる．また，$L^p(\mathbb{R}_{\geq 0})$ 上の有界線形作用素の族 $(e^{t\Delta}_N; t \geq 0)$ と $(e^{t\Delta}_D; t \geq 0)$ は半群を成し，直線上の場合と同様に任意の $p \in [1,\infty]$, $l \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ に対して以下の減衰評価を満たす.

$$\left\|\partial_x^l e^{t\Delta}_N \varphi\right\|_p \leq C t^{-\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{p}\right)-\frac{l}{2}} \|\varphi\|_1, \qquad t > 0,$$
$$\left\|\partial_x^l e^{t\Delta}_D \varphi\right\|_p \leq C t^{-\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{p}\right)-\frac{l}{2}} \|\varphi\|_1, \qquad t > 0.$$

さらに，部分積分を用いることで，$(e^{t\Delta}_N; t \geq 0)$ と $(e^{t\Delta}_D; t \geq 0)$ の間には

$$(e^{t\Delta}_N \partial_x v)(x) = -2G(t,x)v(0) + \partial_x(e^{t\Delta}_D v)(x)$$

が成り立つことがわかる．実際,

$$\begin{aligned}
(e^{t\Delta}_N \partial_x v)(x) &= \int_0^\infty (G(t,x-y) + G(t,x+y))(\partial_y v)(y)\,\mathrm{d}y \\
&= [(G(t,x-y) + G(t,x+y))v(y)]_{y=0}^{y=\infty} - \int_0^\infty (\partial_y(G(t,x-y) + G(t,x+y)))v(y)\,\mathrm{d}y \\
&= -2G(t,x)v(0) + \int_0^\infty ((\partial_x G)(t,x-y) - (\partial_x G)(t,x+y))v(y)\,\mathrm{d}y \\
&= -2G(t,x)v(0) + \partial_x \int_0^\infty (G(t,x-y) - G(t,x+y))v(y)\,\mathrm{d}y \\
&= -2G(t,x)v(0) + \partial_x(e^{t\Delta}_D v)(x)
\end{aligned}$$

となる．この関係式を用いることで, (IBP) は以下のような積分方程式に書き換えることができる．

$$\begin{aligned} u(t,x) &= e_N^{t\Delta}u_0(x) + \int_0^t e_N^{(t-\tau)\Delta}\partial_x f(u(\tau))(x)\,\mathrm{d}\tau \\ &= e_N^{t\Delta}u_0(x) - \int_0^t 2G(t-\tau,x)f(u(\tau,0))\,\mathrm{d}\tau + \int_0^t \partial_x e_D^{(t-\tau)\Delta} f(u(\tau))(x)\,\mathrm{d}\tau\,. \end{aligned} \tag{3.1}$$

この積分方程式 (3.1) を直接解析することで，解の存在とその性質に関する次の命題を得る．

命題 3.1. 任意の $q \in (1,\infty)$ 及び任意の $u_0 \in (L^1 \cap L^\infty)(\mathbb{R}_{\geq 0})$ に対し，(IBP) には時間大域的な解

$$u \in (C \cap L^\infty)((0,\infty);(C \cap L^1 \cap L^\infty)(\mathbb{R}_{\geq 0}))$$

が唯一つ存在する．また，任意の $t > 0$ に対して

$$\|u(t)\|_1 + \int_0^t |u(\tau,0)|^q\,\mathrm{d}\tau \leq \|u_0\|_1, \quad \|u(t)\|_\infty \leq \|u_0\|_\infty$$

が成り立つ．さらに任意の $p \in (1,\infty)$ に対して,

$$u \in C((0,\infty);W^{2,p}(\mathbb{R}_{\geq 0})) \cap C^1((0,\infty);L^p(\mathbb{R}_{\geq 0}))$$

であり，任意の $p \in (1,\infty)$ に対して，次の減衰評価を満たす.

$$\|u(t)\|_p \leq Ct^{-\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{p}\right)}, \qquad t > 0.$$

4 主定理

まず，解の第一漸近形に関する定理を述べる．

定理 4.1. $q > 2$ とする．$u_0 \in (L_1^1 \cap L^\infty)(\mathbb{R}_{\geq 0})$ であるとし，u を (IBP) の時間大域解とする．このとき，任意の $p \in [1,\infty]$ に対してある正数 $C_p > 0$ が存在して，任意の $t \geq 2$ に対して,

$$\|u(t) - M_0G(t)\|_p \leq C_p \begin{cases} t^{-\frac{1}{2}(1-\frac{1}{p})-\frac{q-2}{2}}, & 2 < q \leq 3, \\ t^{-\frac{1}{2}(1-\frac{1}{p})-\frac{1}{2}}, & q > 3 \end{cases}$$

が成り立つ．ここで,

$$M_0 \coloneqq 2\left(\int_0^\infty u_0(x)\,\mathrm{d}x - \int_0^\infty f(u(\tau,0))\,\mathrm{d}\tau\right) = 2\left(\int_0^\infty u_0(x)\,\mathrm{d}x - \int_0^\infty (u|u|^{q-1})(\tau,0)\,\mathrm{d}\tau\right)$$

である．

注意 1. 先行研究の章で述べたように，$q = 3$ のとき (P) の解の第一漸近形への収束率は，$O\left(t^{-\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{p}\right)-\frac{1}{2}}\log t\right)$ のオーダーが最良であることが示されているが，定理 4.1 では (IBP) の解の第一漸近形への収束率は $O\left(t^{-\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{p}\right)-\frac{1}{2}}\right)$ に改善出来ることが示されている．

次に，$q = 3$ の場合の解の第二漸近形についての定理を述べる．

定理 4.2. $q=3$ とする．$u_0 \in (L_1^1 \cap L^\infty)(\mathbb{R}_{\geq 0})$ であるとし，u を (IBP) の大域解とする．このとき，任意の $p \in [1,\infty]$ に対して，以下が成り立つ．

$$\lim_{t\to\infty} t^{\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{p}\right)+\frac{1}{2}} \|u(t) - M_0 G(t) - A(t)\|_p = 0$$

が成り立つ．ここで，

$$\begin{aligned} A(t,x) \coloneqq& \int_0^t \left(-2G(t-\tau,x) + 2G(t,x)\right) f(M_0 G(\tau,0))\,\mathrm{d}\tau \\ &+ 2\int_t^\infty f(M_0 G(\tau,0))\,\mathrm{d}\tau\, G(t,x) + \int_0^t \partial_x e_D^{(t-\tau)\Delta} f(M_0 G(\tau))(x)\,\mathrm{d}\tau \end{aligned}$$

である．

5 主結果の証明の概略

この章では，本研究の主結果である定理 4.1 の証明の概略を説明する．(IBP) は積分方程式 (3.1) に書き換えられることから，$u(t,x) - M_0 G(t,x)$ を次のように分解できる．.

$$\begin{aligned} u(t,x) - M_0 G(t,x) &= e_N^{t\Delta} u_0(x) - \int_0^t 2G(t-\tau,x) f(u(\tau,0))\,\mathrm{d}\tau + \int_0^t \partial_x e_D^{(t-\tau)\Delta} f(u(\tau))\,\mathrm{d}\tau \\ &\quad - 2\left(\int_0^\infty u_0(x)\,\mathrm{d}x - \int_0^\infty f(u(\tau,0))\,\mathrm{d}\tau\right) G(t,x) \\ &= e_N^{t\Delta} u_0(x) - 2\left(\int_0^\infty u_0(x)\,\mathrm{d}x\right) G(t,x) \\ &\quad - \int_0^t 2G(t-\tau,x) f(u(\tau,0))\,\mathrm{d}\tau + \int_0^\infty 2f(u(\tau,0))\,\mathrm{d}\tau\, G(t,x) \\ &\quad + \int_0^t \partial_x e_D^{(t-\tau)\Delta} f(u(\tau))\,\mathrm{d}\tau \end{aligned}$$

あとは，各項をそれぞれ評価していくのだが，その際に重要となる評価を以下に補題として述べる．

補題 5.1. $1 \leq p \leq \infty$ とする．このとき，$u_0 \in L_1^1(\mathbb{R}_{\geq 0})$ であるならば，

$$\lim_{t\to\infty} t^{\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{p}\right)+\frac{1}{2}} \left\|e_N^{t\Delta} u_0 - M' G(t)\right\|_p = 0$$

が成り立つ．ここで，$M' \coloneqq 2\displaystyle\int_0^\infty u_0(x)\,\mathrm{d}x$ である．

注意 2. この評価を式 (2.2) と比較すると，ノイマン境界条件を課した半直線上の線形熱方程式の解の第一漸近形は直線上の線形熱方程式と同様に熱核の定数倍であるが，第一漸近形への収束率は直線上の場合よりも早くなることが分かる．また式 (2.3) と比較すると，ノイマン境界条件を課すと，直線上の場合に解の第二漸近形に対応していた部分が 0 になることも分かる．

補題 5.1 の証明の概略．等式

$$
\begin{aligned}
e_N^{t\Delta}u_0(x) - M'G(t,x) &= e_N^{t\Delta}u_0(x) - 2\left(\int_0^\infty u_0(x)\,\mathrm{d}x\right)G(t,x) \\
&= \int_0^\infty (G(t,x-y)+G(t,x+y))u_0(y)\,\mathrm{d}y - 2\left(\int_0^\infty u_0(y)\,\mathrm{d}y\right)G(t,x) \\
&= \int_0^\infty (G(t,x-y)-G(t,x)+y\partial_x G(t,x))u_0(y)\,\mathrm{d}y \\
&\quad + \int_0^\infty (G(t,x+y)-G(t,x)-y\partial_x G(t,x))u_0(y)\,\mathrm{d}y
\end{aligned}
$$

を用いて証明する．注意 2 で述べたように第二漸近形に対応していた部分が 0 になることは，最右辺第三項と最右辺第六項の和が 0 であることに起因している．

□

補題 5.2. $q=3$ とする．$u_0 \in (L_1^1 \cap L^\infty)(\mathbb{R}_{\geq 0})$ であるとし，u を (IBP) の時間大域解とする．このとき，任意の $p\in[1,\infty]$ に対してある $C_p>0$ が存在して，任意の $t\geq 2$ に対して，

$$
\left\| \int_0^t \partial_x e_D^{(t-\tau)\Delta} f(u(\tau))\,\mathrm{d}\tau \right\|_p \leq C_p t^{-\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{p}\right)-\frac{1}{2}}
$$

が成り立つ．

補題 5.2 の証明の概略．この補題の証明においては，Fukuda[2] の Propotion 4.2 の証明を参考にした．Fukuda[2] の証明と大きく異なるのは，等式

$$
\begin{aligned}
\partial_x e_D^{(t-\tau)\Delta} f(u(\tau))(x) &= \partial_x e_D^{(t-\tau)\Delta}((M_0G)^3(\tau))(x) \\
&= M_0^3 \int_0^\infty \partial_x G(t-\tau,x-y)G^3(\tau,y)\,\mathrm{d}y \\
&\quad - M_0^3 \int_0^\infty \partial_x G(t-\tau,x+y)G^3(\tau,y)\,\mathrm{d}y \\
&= M_0^3 \int_0^\infty \partial_x G(t-\tau,x-y)\left(-\frac{d}{dy}\int_y^\infty G^3(\tau,\eta)\,\mathrm{d}\eta\right)\mathrm{d}y \\
&\quad - M_0^3 \int_0^\infty \partial_x G(t-\tau,x+y)\left(-\frac{d}{dy}\int_y^\infty G^3(\tau,\eta)\,\mathrm{d}\eta\right)\mathrm{d}y \\
&= M_0^3 \partial_x G(t-\tau,x)\int_0^\infty G^3(\tau,\eta)\,\mathrm{d}\eta \\
&\quad - M_0^3 \int_0^\infty \partial_x^2 G(t-\tau,x-y)\int_y^\infty G^3(\tau,\eta)\,\mathrm{d}\eta\,\mathrm{d}y \\
&\quad - M_0^3 \partial_x G(t-\tau,x)\int_0^\infty G^3(\tau,\eta)\,\mathrm{d}\eta \\
&\quad - M_0^3 \int_0^\infty \partial_x^2 G(t-\tau,x+y)\int_y^\infty G^3(\tau,\eta)\,\mathrm{d}\eta\,\mathrm{d}y \\
&= -M_0^3 \int_0^\infty \partial_x^2 G(t-\tau,x-y)\int_y^\infty G^3(\tau,\eta)\,\mathrm{d}\eta\,\mathrm{d}y \\
&\quad - M_0^3 \int_0^\infty \partial_x^2 G(t-\tau,x+y)\int_y^\infty G^3(\tau,\eta)\,\mathrm{d}\eta\,\mathrm{d}y
\end{aligned}
$$

が成り立つことである．直線上の場合は上式 4 つ目の等号の右辺における第一項と第三項が打ち消し合わず，ここから (P) の解の第二漸近形である $\dfrac{1}{4\sqrt{3}\pi}M^3(\log t)$ が導出されるが，ノイマン境界条件を課した場合は直線上の場合の第二漸近形に対応する部分が 0 となる． □

参考文献

[1] M. Escobedo and E. Zuazua: Large time behavior for convection-diffusion equations in $\mathbf{R}^N$, J. Funct. Anal.**100**(1991)119-161.

[2] I. Fukuda: Asymptotic profiles of solutions for the generalized Fornberg-Whitham equation with dissipation, J. Math. Anal. Appl.**527**(2023)127427, 30 pp.

[3] I. Fukuda and S. Sato: Higher-order asymptotic profiles of solutions to the Cauchy problem for the convection-diffusion equation with variable diffusion, arXiv:2405.00896.

[4] 儀我美一，儀我美保：非線形偏微分方程式-解の漸近挙動と自己相似解-, 共立出版, 1999.

[5] G. Karch: Asymptotics of solutions to a convection-diffusion equation on the half-line, Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A **130**(2000), 837-853.

[6] T. Kato: "Perturbation Theory for Linear Operators", Grundlehren der mathematischen Wissenschaften 132, Second edition, Springer, 1995.

[7] A. Pazy: "Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations", Applied Mathematical Sci. 44, Springer, 1983.

[8] E. Zuazua: Asymptotic behavior of scalar convection-diffusion equations, arXiv:2003.11834

[9] E. Zuazua: Weakly nonlinear large time behavior in scalar convection-diffusion equations, Differ. Integral. Equ.**6**(1993)1481-1492.